Satır Basamak Formu

Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan matrise, satır basamak formadır denir.

1) Her satırdaki (soldan sağa) sıfırdan farklı ilk eleman 1 olmalıdır.
2) k. satırdaki elemanların hepsi birden sıfır değil ise, k+1. satırdaki (soldan sağa) öndeki sıfırların sayısı, k. satırdaki (soldan sağa) öndeki sıfırların sayısından daha büyük olmalıdır.
3) Elemanlarının hepsi birden sıfır olan satırlar, elemanlarının hepsi birden sıfır olmayan satırların altında olmalıdır.

ÖRNEKLER

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a), (b), (c) satır basamak formdadır.

(d), (e), (f) " " " değildir

Tanım: Bir lineer sistemde I. II. III. satır işlemlerini kullanarak, genişletilmiş matrisi satır basamak formda olan bir sisteme, geçiş sürecine, Gauss yoketme yöntemi denir.

ÖRNEKLER

1) Aşağıdaki sistemleri Gauss yoketme yöntemi ile çözünüz

a) $x_1 - 2x_2 = 3$
$2x_1 - x_2 = 9$

b) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \Rightarrow S_2 + (-2)S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$

$0.x_1 + 3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$
$x_1 - 2x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 5$ $(5, 1)$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \Leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_2 - x_3 = -5$ $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ $x_2 = \alpha - 5$

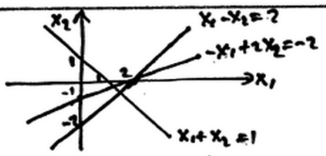
$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 8 - 2\alpha$

$(8 - 2\alpha, \alpha - 5, \alpha)$ $\alpha = 4$ $(0, -1, 4)$

Aşırı Belirgin Sistemler

Bir lineer sistemde, bilinmeyenlerden daha fazla denklem sayısı varsa bu sisteme aşırı belirgin denir. Bu sistemler genelde kararsızdır (tutarsız) (Her zaman değil)

Örnek: $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = -2$



Az Belirgin Sistemler

Eğer bir sistemde denklem sayısı bilinmeyenlerden az ise bu sisteme az belirgin sistem denir. m lineer denklem n bilinmeyen varsa $m < n$ dir. Genelde sonsuz sayıda çözüm vardır ama kararsız da olabilir. Bu sistemlerde yalnız bir çözüm yoktur.

Örnekler

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$
$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

2) $-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 4$
$3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ Çözüm yok. $0.x_1 + 0.x_2 + \dots + 0.x_4 = -2$

(2) $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & -26 \end{array}\right]$

$12x_3 - 12x_4 = -26$ $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ $x_3 = \alpha - \frac{13}{6}$

$x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} - \alpha$

$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \Rightarrow x_1 = \alpha + \frac{1}{2}$ $(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{4}{3} - \alpha, \alpha - \frac{13}{6}, \alpha)$

İndirgenmiş Satır Basamak Formu

Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan matrise, indirgenmiş satır basamak formdadır denir.

1) Matris satır basamak formdadır.
2) Her satırdaki (soldan sağa) sıfırdan farklı ilk elemanın bulunduğu sütunda bu elemanın dışındaki bütün elemanlar sıfır olmalıdır.

Tanım: Bir lineer sistemde I. II. ve III. satır işlemlerini kullanarak genişletilmiş katsayılar matrisi indirgenmiş basamak formda olan bir sisteme, geçiş sürecine, Gauss-Jordan indirgeme yöntemi denir.

Örnekler. 1) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) (b) (c) indirgenmiş basamak formda
(d) (e) // // // değildir.

2) Gauss-Jordan indirgeme yöntemini kullanarak aşağıdaki sis. çözünüz.

a) $x_1+x_2=-1$, $4x_1-3x_2=3$ b) $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1-x_2-x_3=0$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $S_2 \to \frac{S_2}{-7}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1=0$, $x_2=-1$

Tanım: Bir lineer denklem sisteminde eşitliğin sağ tarafındaki sabitlerin tümü sıfır ise bu sisteme <u>homojen sistem</u> denir. $a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0$ ... $a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0$

Teorem: Bir $m\times n$ homojen denklem sisteminde, $n>m$ ise sistem aşikar olmayan çözüme sahiptir.

MATRİS CEBRİ

Matrisler genellikle $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle gösterilir. Bir satıra veya bir sütuna sahip matrisler, bir lineer sistemin çözümünü temsil ettiği için özellikle ilginçtir. n-bilinmeyenli bir lineer sistemin çözümü $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ($[a_1\ a_2 \cdots a_n]$) bir vektördür. Bu vektör $1\times n$ tipinde bir matris olarak gösterilirse satır vektör, $n\times 1$ tipinde bir matris olarak gösterilirse sütun vektör denir.

$[a_1\ a_2 \cdots a_n]$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Örneğin $x_1+3x_2=7$, $3x_1-x_2=1$ lineer sisteminin çözümü satır vektör olarak $[1\ 2]$ ($(1,2)$), sütun vektör olarak $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ile gösterilir.

Bütün $n\times 1$ matrislerin kümesine öklidyen n-uzay denir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir.

$x \in \mathbb{R}^n$ $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Eğer A, $m\times n$ tipinde bir matris ise i. satır

$a(i,:) = [a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}]$ $i=1,2,\dots,m$

j. sütun

$a(:,j)=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $j=1,2,\dots,n$

ile gösterilir. (Bir A matrisi $A=(a_{ij})$ ile kısaca ifade edilir)

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 2. satır $[3\ -1\ 4]$ 3. sütun $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$a_{12}=2$
$a_{33}=5$

Tanım: Her i ve j için $a_{ij}=b_{ij}$ ise $m\times n$ tipindeki A ve B matrisine <u>eşittir</u> denir.

Tanım: A, $m\times n$ tipinde bir matris ve α bir skaler ise, αA, (i,j)'ninci elemanı αa_{ij} olan $m\times n$ tipinde bir matristir.

Tanım: $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ $m\times n$ tipinde matrisler ise $A+B$, (i,j)'ninci elemanı $a_{ij}+b_{ij}$ olan $m\times n$ tipinde bir matristir.

Örnekler

1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & x \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ $A=B$ için x ne olmalıdır.

$a_{11}=3$ $a_{12}=5$ $b_{11}=3$ $b_{12}=x$
$a_{21}=8$ $a_{22}=4$ $b_{21}=8$ $b_{22}=4$

$a_{ij}=b_{ij}$ $a_{11}=b_{11} \Rightarrow$
$a_{12}=b_{12} \Rightarrow x=5$

2) $A=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ ise $\alpha=-4$ ise $-4A=?$

$-4A=\begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 4 & -36 \end{bmatrix}$

3) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ise $A+B=?$

$A+B=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha r_i = \alpha r_1 + \alpha r_2 + \alpha r_3 + \dots + \alpha r_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha r_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha r_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha r_l$$

37

Tanım: $A=(a_{ij})$, $m\times n$ tipinde, $B=(b_{ij})$, $n\times r$ tipinde bir matris ise A ve B matrislerinin çarpımı, $AB=C=(c_{ij})$, (i,j)'ninci elemanı

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

olan $m\times r$ tipinde bir matristir.

<u>örnek:</u> $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$

$2\times \underline{2}$ $\quad \underline{2}\times 3$

2×3

38

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$$

$$c_{23}=\sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k3}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{bmatrix}$$

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$

3×2 $\quad 2\times 3$

39

$$AB=\begin{bmatrix} 1.1+3.1 & 1.2+3.3 & 1.4+3.1 \\ 4.1+2.1 & 4.2+2.3 & 4.4+2.1 \\ 5.1+1.1 & 5.2+1.3 & 5.4+1.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 11 & 7 \\ 6 & 14 & 18 \\ 6 & 13 & 21\end{bmatrix}$$

3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5\end{bmatrix}$

$AB=?$ $\quad 2\times \underline{\underline{2}}$ $\quad \underline{\underline{3}}\times 2$ $\quad$ AB olamaz BA çarpımı yapılır

40